Олимпиада для студентов и выпускников вузов — 2014 г.

Направление "Прикладная математика и информатика
Профиль "Науки о данных"
Решение каждой задачи оценивалось в 10 баллов.
Максимальная сумма баллов - 100.
Задачи с подпунктами имели различные баллы за выполнение каждого из пунктов.

Содержание

Задача №1

Пример двух бинарных отношений с нужными свойствами:

$$R_1(x,y) \ := \ (x = y+1)$$

$$R_2(x,y) \ := \ (x = y-1)$$

Никакое из них не является транзитивным.
Композиция этих отношений

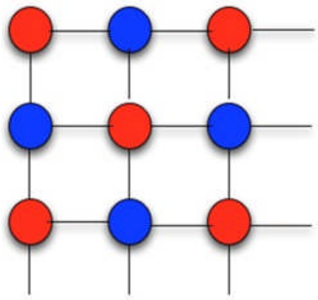
$$R_3(x,y) \ = \ \exists u\ (R_1(x,u)\ \&\ R_2(u,y)) \ \Leftrightarrow\ \exists u\ (x = u+1\ \&\ u = y-1) \ \Leftrightarrow\ (x = y)$$

Легко проверить, что R_3 транзитивно, а именно,

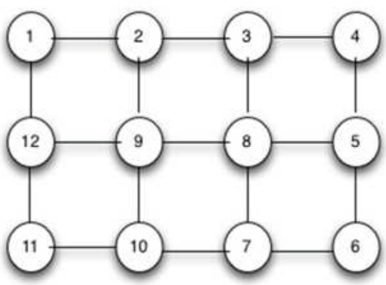
$$\forall x,\ y,\ z\ (x = y\ \&\ y = z\ \Rightarrow\ x = z).$$

Задача №2

А) Требуется предложить раскраски вершин в два цвета, такую что вершины одного цвета относятся к одной доле, а вершины второго цвета – к другой. Такую схему можно сформулировать двумя способами. Первый: в один цвет раскрасим такие вершины, для которых (i+j) mod 2 = 0, где i – номер строки в волебойной сетке, а j – номер столбца. В другой цвет раскрасим вершины, для которых (i+j) mod 2 = 1. Второй: будем окрашивать вершины по диагоналям в сетке (показано на рисунке): первая вершина на первом ряду, вторая вершина на втором, третья на третьем или вторая вершина на первом ряду, третья решина на втором и т.д. В обоих случая вершины разных цветов будут образовывать две доли. Обратим внимание на то, что предложенные схемы раскрашивания не зависят от числа вершин в ряду и количества рядов. Следовательно, при любых m и n граф будет двудольным.



Б) В графе существует гамильтонов цикл, если одно из чисел m или n четное. Порядок обхода вершин представлен на рисунке. Полученный обход вершин является гамильтоновым циклом. Особенностью этого обхода является движение по периметру по двум сторонам, затем шаг к центральному ряду (из вершины 7 в вершину 8) и обратно (из вершины 9 в вершину 10), после чего обход продолжается по периметру. Если бы n было равно трем, подобного обхода не существовало и граф не содержал гамильтонова цикла. Аналогично для больших m и n. Формальное доказательство представлено в Skiena, S. "Grid Graphs." §4.2.4 in *Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica.* Reading, MA: Addison-Wesley, pp. 147-148, 1990.



Ответ:
А) при любых m и n (4 балла)
Б) одно из чисел m или n четное (6 баллов)

Задача №3

Пусть n – число вершин, а в каждую вершину входит k ребер. Поскольку граф – полный, из каждой вершины так же выходит k ребер. То есть, степень каждой вершины – 2k. С другой стороны, степень каждой вершины равна n-1, поскольку каждая вершина соединена со всеми вершинами, кроме себя самой. Тогда 2k = n – 1. При целых n и k это возможно только тогда, когда n – нечетное.

Ответ: при нечетных n.

Задача №4

Пусть N_1 - число паспортов из серии 4508, в номерах которых 53 встречается ровно один раз, N_2 - ровно 2 раза, N_3 - ровно 3 раза ($N_3 = 1$), $N = N_1 + N_2 + N_3$ - хотя бы один раз (то что нам и надо найти). Будем сразу считать N. Начнем с того, что число паспортов, номер которых начинается на 53 — 10000 (10^4). Разумно предположить, что ответом будет $5 \cdot 10^4$ (шаблоны номера: $53abcd$, $a53bcd$, $ab53cd$, $abc53d$, $abcd53$, где a, b, c, d - любые цифры от 0 до 9). Но в таком случае мы несколько раз считаем те случаи, когда 53 встречается в номере дважды (N_2) и трижды (N_3). При таком подсчете мы по два раза учли номера, включающие 53 два раза и три раза - номер 535353. Значит, из $5 \cdot 10^4$ вычитаем 2 (лишние подсчеты номера 535353) и N_2.

$N_2 = C_4^2 \cdot 10^2 - 3 = 597$. $C_4^2 = 6$ — число вариантов выбора двух из четырех позиций для блоков 53 (возможные шаблоны: 5353ab, 53a53b, 53ab53, a5353b, a53b53, ab5353). Вычтенная тройка — число подсчетов номера 535353, который в данном случае нас не интересует.

Итого N $= 5 \cdot 10^4 - 2 - 597 = 49401$.

Задача №5

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ раскладывается в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}.$$

При члене x^{2014} стоит коэффициент $-1^{1007} = -1$.

С другой стороны, по формуле Тейлора в окрестности 0 $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = \sum \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k$, где $f^{(k)}(x)$ - k-ая производная функции $f(x)$.

Приравнивая коэффициенты при x^{2014} в двух представлениях $f(x)$, получаем:

$$-1 = \frac{f^{(k)}(0)}{2014!} \Rightarrow f^{(k)}(0) = -2014!$$

Задача №6

Решение задачи предполагает использование правила Лопиталя или метода асимптотических оценок по разложениям в ряд Тейлора. Рассмотрим второй способ как более сильный.

Сначала проверим вырожденный случай $b \leqslant 0$ для допустимых значений x, отличных от 0:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{sin(ax)} - cos(x)}{x^b} = \lim_{x \to 0} (1 + sin(ax) + O(x^2) - 1 + O(x^2)) \cdot x^{-b} = 0 \neq \frac{1}{2},$$

что не подходит по условию задачи.

Теперь распишем разложения в ряд Тейлора для числителя в два этапа:

$$L = \lim_{x\to 0}\frac{e^{sin(ax)} - cos(x)}{x^b} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{1 + sin(ax) + sin^2(ax) + o(sin^2(ax)) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^b} =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{ax + a^2x^2 + o(a^2x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^b}.$$

Далее возможны два случая: основной - $a \neq 0$ и дополнительный - $a = 0$.

$$1.\ a \neq 0\ -\ L = \lim_{x\to 0}\frac{ax + o(x^2)}{x^b} = \frac{1}{2}\text{ только при } b = 1,\text{ откуда получаем } a = \frac{1}{2}.$$
$$2.\ a = 0\ -\ L = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^b} = \frac{1}{2}\text{ только при } b = 2.$$

Ответ: $(a, b) = \{(\frac{1}{2}, 1); (0, 2)\}$

Задача №7

Мы хотим определить случайную величину $\xi : \Omega \to \mathbb{N}$, т.к. значения вероятностей при делении на знаменатель должны быть определены и, следовательно, k принимает только натуральные значения. Обозначим через $p_k = P(\xi = k)$.
Далее мы обязаны проверить 3 свойства вероятности:

1. $p_k \geqslant 0$;
2. $p_k \leqslant 1$;
3. $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} p_k = 1$.

Из первых двух следует, что значение константы c, если она существует, ограничивается неравенствами:

$$c \geqslant 0 \text{ и } c \leqslant k^2 + k.$$

Поскольку вершина параболы $y = k^2 + k$ с ветвями направленным вверх находится в точке с $k = -\frac{1}{2} < 1$, то последнее неравенство на константу c превращается в неравенство $c \leqslant 2$, которое получается при подстановке $k = 1$ как минимального значения возрастающей ветви параболы.

Наконец, можно переходить к основной части задачи - пункту 3.

$$S=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}p_k=\lim_{n\to+\infty}S_k,\ \text{где } S_k\quad \text{частичная сумма ряда.}$$

$$S_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{c}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{c}{k}-\frac{c}{k+1}\right)=c\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right).$$

$$S=\lim_{n\to+\infty}S_k=\lim_{n\to+\infty}c\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=c$$

Отсюда следует, что $c = 1$, и данное значение параметра удовлетворяет двум предыдущим неравенствам.

Ответ: 6а) $c = 1$.

Замечание: Раскрытие скобок в бесконечном ряду приводило к знакопеременному ряду, в котором "сокращение"(по сути, перестановка скобок) без использования дополнительных утверждений не допустимо.

Вторая часть решения задачи сводилась к знанию определения математического ожидания $M\xi$ или $E\xi$:

$$E\xi=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k\cdot\xi_k=\sum_{k=1}^{+\infty}p_k\cdot k=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k+1}=+\infty,$$

т.к. полученный ряд является расходящимся гармоническим рядом. **Ответ: 6б)** $E\xi = +\infty$.

Замечание: Желательным здесь было доказательство расходимости гармонического ряда по интегральному признаку Коши или доказательство того, что для любого натурального N отрезок ряда от $N+1$ до $2\cdot N$ больше $\frac{1}{2}$, что противоречит условию Коши сходимости ряда.

Задача №8

В четырехмерном евклидовом пространстве привести пример трех двумерных плоскостей, из которых любые две пересекаются только по нулевому вектору

В четырехмерном пространстве 3 двумерные плоскости можно задать как:

$$\begin{cases} A_1x_1 + B_1x_2 + C_1x_3 + D_1x_4 + E_1 = 0 \\ A_2x_1 + B_2x_2 + C_2x_3 + D_2x_4 + E_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} A_3x_1 + B_3x_2 + C_3x_3 + D_3x_4 + E_1 = 0 \\ A_4x_1 + B_4x_2 + C_4x_3 + D_4x_4 + E_2 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} A_5x_1 + B_5x_2 + C_5x_3 + D_5x_4 + E_5 = 0 \\ A_6x_1 + B_6x_2 + C_6x_3 + D_6x_4 + E_6 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Каждое из выражений (1), (2) и (3) означает пересечение двух трехмерных плоскостей. Каждая из плоскостей пересекается с другой в точке $(0,0,0)$ тогда и только тогда, когда системы (1), (2) и (3) попарно имеют единственное решение, т.е. одновременно должны выполняться соотношения:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 \end{vmatrix} \neq 0, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_5 & B_5 & C_5 & D_5 \\ A_6 & B_6 & C_6 & D_6 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4)$$

Ясно, что первый определитель в (4) не равен нулю в случае, если его можно с помощью линейных преобразований строк или столбцов привести в единичной матрице:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5)$$

Таким образом, пара двумерных плоскостей, пересекающихся в точке $(0,0,0)$ может быть задана:

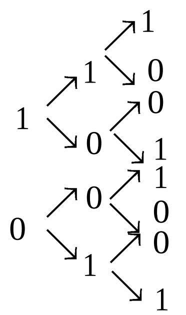
$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{или} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \text{и} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \quad (6)$$

В случае, если участник олимпиады записал уравнения двумерных плоскостей в 4-мерном пространстве в любом виде, например, в виде (1), (2) и (3) ставились 3 балла. Если сформулированы критерии (4), то еще 3 балла. Если получены выражения (6), то к предыдущей сумме добавлялись еще 4 балла.

Задача №9

Дано множество всех двоичных векторов длины n. расположить элементы этого множества в последовательность так, чтобы соседние отличались только в одной координате.

Существует несколько способов решения задачи. К одному из методов решения можно прийти, составив с помощью правила произведения из раздела комбинаторики все возможные комбинации и сделав соответствующую сортировку. Например, в случае вектора длины 3 схему можно представить в виде дерева:



Фактически схема означает, что каждый новый слой начинается с 1 и затем происходит попарное чередование 0 и 1. Таким образом, отсортированные векторы будут отличаться одной координатой: $(1,1,1)$, $(1,1,0)$, $(1,0,0)$, $(1,0,1)$ и т.д.

Другим способом решения является последовательное зеркальное отражение построенного первоначального множества с добавлением в верхнем множестве 0, в нижнем 1.

Первый шаг:
0
1

Второй шаг
00
01
11
10

Второй шаг
000
001
011
010
110
111
101
100

В случае, если участник олимпиады указал все возможное количество векторов уравнения 2^n ставились 3 балла. Если построен алгоритм сортировки в частном случае (для конкретных значений n) начислялись еще 3 балла. Если сформулирован любой корректный алгоритм в общем случае, то к предыдущей сумме добавлялись еще 4 балла.

Задача №10

Переформулируем условие задачи в удобный для решения вид. Повороты и отражения ожерелья удобно рассматривать в виде поворотов и отражений правильного 12-угольника с камнями в вершинах. В задаче идет речь о действии группы симметрий (диэдрической группы $\mathfrak{D}_{12}$) на 12-угольник. При этом одинаковые раскраски попадают в один и только в один класс эквивалентности - орбиту некоторых вершин под действием группы.

Данную задачу можно было решить зная лемму Бернсайда и теорему Пойа, однако, упрощенный вариант можно было придумать исходя из следующих утверждений:

1. Группа симметрий состоит из

1 **тождественного преобразования**,

11 **поворотов** на углы $\frac{2\pi k}{12}$, k=1,$\cdots$,11,

6 **симметрий относительно осей**, проходящих через **противоположные вершины** и

6 симметрий относительно осей, проходящих через **середины противоположных сторон** 12-угольника.

О структуре и порождающих диэдрической группы можно почитать здесь: `http://ru.wikipedia.org/wiki/Диэдрическая_группа`

Обозначив минимальный поворот за r, одну из симметрий за s, и увидев соотношения (достаточно первых два)

$$rsr = s^{-1} = s,\ (rs)^2 = 1,\ srs = r^{11},\ sr^6 = r^6 s$$

легко обнаружить, что все остальные симметрии могут быть получены в одном из следующих видов:

$$e = id, r, r^2, \ldots, r^{11};\ es = s, sr, sr^2, \cdots, sr^{11}$$

Тем самым мы получаем список элементов диэдрической группы и доказываем, что других симметрий не существует.

$$\mid \mathfrak{D}_{12} \mid = 24$$

2. Теорема Лагранжа о порядке группы:

$$\forall d \quad \text{вершины выполняется} \ \mid Orb(d) \mid \cdot \mid St(d) \mid = \mid \mathfrak{D}_{12} \mid,$$

где - $Orb(d)$ и $St(d)$ – орбита и стабилизатор вершины d соответственно. При действии группы на множество **число орбит и будет равно** N – **количеству классов эквивалентности относительно раскраски**. Объединяя предыдущие два предложения мы получим упрощенную версию Леммы Бернсайда:

$$N \cdot \mid \mathfrak{D}_{12} \mid = \sum_{Orb_i} \sum_{d \in Orb_i} \mid St(d) \mid$$

3. Для каждого элемента из списка выше нужно понять, как он действует на 12-угольник. Действие группы на множестве легко может быть записано в виде **подстановок вершин** 12-угольника, которые мы **нумеруем** числами от 1 до 12 по часовой стрелке. Мы выбираем **вершины**, потому что именно им будут ставиться с соответствие камни разных цветов. Каждую подстановку мы раскладываем в произведение независимых циклов. Пусть подстановка разложилась в $\mathbf{k_i}$ **циклов длины** i, $i = 1, 2, \cdots \leqslant 12$, тогда, заметим, что **внутри каждого цикла должен быть одинаковый цвет**, но **разные циклы могут соответствовать любому из 3 цветов независимо** друг от друга, и получим, что

$$\sum_{Orb_i} \sum_{d \in Orb_i} \mid St(d) \mid = C_j \cdot 3^{\sum_i k_i},$$

где C_j – количество орбит, имеющих одинаковое представление в виде разложения в независимые циклы.

4. Осталось для нашей задачи написать эти разложения:

- Например тождественный элемент оставляет 12-угольник на месте. Соответствующую подстановку можно записать как 12 циклов длины 1 - отсюда получается вклад 3^{12}. Оказывается, его можно включить в подгруппу вращений в следующем пункте.

- Повороты r^i, где i можно считать от 1 до 12 ($r^{12} = e$) разбивают подстановку в $\frac{i}{gcd(i,12)}$ циклов длины $gcd(i, 12)$, где $gcd(a, b)$ – наибольший общий делитель чисел a и b. Зная функцию Эйлера φ достаточно подсчитать для случая орбиты с $i = (i, 12)$, тогда количество таких орбит будет равно $\varphi(i)$. Данный результат хорошо известен при изучении циклических групп, коей является подгруппа вращений 12-угольника. Итоговый вклад по поворотам вычисляется по формуле:

$$\sum_{\substack{i|12,\\ 1\leqslant i\leqslant 12}} \phi(i) \cdot 3^{\frac{12}{i}} = \sum_{i=1,2,3,4,6,12} \phi(i) \cdot 3^{\frac{12}{i}} = 1 \cdot 3^{12} + 1 \cdot 3^6 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3^1.$$

- 6 симметрий относительно осей, проходящих через середины противоположных ребер разбиваются на 6 циклов длины 2, что дает вклад $6 \cdot 3^6$.

- А 6 симметрий относительно осей, проходящих через противоположные вершины имеют 2 неподвижные точки - вершины лежащие на осях. Таким образом действие этого типа симметрий раскладывается в произведение 2 циклов длины 1 и оставшихся 5 циклов длины 2. Тем самым вклад по этому типу симметрий составляет $6 \cdot 3^{5+2} = 6 \cdot 3^7$.

5. **Окончательный ответ** получается собиранием всех случаев в одну сумму и делением на порядок группы $\mathfrak{D}_{12}$:

$$N = \frac{1}{24} \cdot (3^{12} + 3^6 + 2 \cdot 3^4 + 2 \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3^6 + 6 \cdot 3^7) = \mathbf{22913} \text{ (!!!)}$$

Критерии оценивания

Везде наличие правильного ответа без подробного обоснования на чистовике или черновике может оцениваться в 0-2 балла.

№1

0-3 Были попытки привести примеры без правильного вычисления композиции отношений.

4-6 Было дано правильно определение композиции отношений, но ход решения на предложенных примерах содержал в себе ошибку.

7-9 Была допущена несущественная ошибка в обосновании, не влияющая на ход решения.

№2

Пункт A):
Если решение состояло только из определения двудольного графа, оно оценивалось в 1 балл.
Любая из описанных схем, описанная графически без подробных объяснений - в 2 или 3 балла, в зависимости от четкости и полноты.
Формальное описание любой из предложенных схем оценивалось в 4 балла.
Пункт B):
Решение, состоящие из определение гамильтонового цикла, оценивалось в 1 балл.
Решение, состоящее из нескольких рисунков графов различных размерностей, в которых гамильтонов цикл был или не был найден, оценивалось в 2-4 балла, в зависимости от числа рисунков и наличия закономерностей в них.
Формальное описание гамильтонового цикла на графе и его существования в случае четного m или n оценивалось в 5-6 баллов в зависимости от полноты описания.

№3

Оценивалось наличие чертежей полных ориентированных графов с четным и нечетным количеством вершин, наличие ответа и его обоснованность, формальное доказательство.

Решения, состоящие только из графических решений оценивались на 1-3 балла.
Решения, имеющие правильный ответ и графическое обоснование оценивались на 4-6 баллов в зависимости от полноты обоснования.
На 7 баллов оценивались решения, в которых было описано неполное/неформальное доказательство.
Решения, имеющие правильное доказательство и графическое обоснование ответа оценивались на 8-10 баллов в зависимости от полноты доказательства, корректности формулировок и использованной терминологии.

№4

0-3 Были попытки подсчитать общее количество комбинаций с учетом расположения позиции 53, но не было учтено их пересечение.

4-6 Были попытки подсчитать пересечения, но они были сделаны с грубыми ошибками в вычислениях или способах вычислений

7-8 Была допущена ошибка в последних вычислениях, не влияющая на ход решения.

9 Была допущена несущественная арифметическая ошибка в последних вычислениях, не влияющая на ход решения.

№5

0-3 Были попытки подсчитать кратные производные дроби, не ведущие к решению.

4-6 Были попытки подсчитать производную разложения в ряд Тейлора, но была допущена грубая арифметическая ошибка.

7-8 Была допущена ошибка в последних вычислениях или было дано не корректное объяснение при получении ответа.

9 Была допущена несущественная арифметическая ошибка в знаке, не влияющая на ход решения.

№6

0-2 Были попытки подсчитать кратные производные дроби, не ведущие к решению.

3-6 Были подсчитаны основные значения параметров $(\frac{1}{2}, 1)$, в решении могли иметь место подстановки правильного ответа или необоснованные переходы.

3-5 Были подсчитаны дополнительные значения параметров $(0, 2)$, в решении могли иметь место подстановки правильного ответа или необоснованные переходы.

7-9 Были подсчитаны обе пары значений параметров $(\frac{1}{2}, 1)$; $(0, 2)$, в решении могли иметь место необоснованные переходы.

№7

Значение c

0-2 Были попытки вычислить ряд. Отсутствовала или осталась не завершенной проверка всех свойств вероятности.

3 При вычислении ряда были необоснованно раскрыты скобки или ряд был представлен в виде разности двух расходящихся гармонических рядов.

4 При обосновании была допущена неточность. Частичные суммы ряда были выписаны не верно или со сдвигом по индексу.

Математическое ожидание ξ

0-2 Были попытки вычислить ряд для математического ожидания.

3 При объяснении допущена ошибка, не влияющая на ход решения.

4 Не обоснована расходимость ряда или нет указаний на то тот факт, что ряд гармонический.

№8

В случае, если участник олимпиады записал уравнения двумерных плоскостей в 4-мерном пространстве в любом виде, например, в виде (1), (2) и (3) ставились 3 балла. Если сформулированы критерии (4), то еще 3 балла. Если получены выражения (6), то к предыдущей сумме добавлялись еще 4 балла.

№9

В случае, если участник олимпиады указал все возможное количество векторов уравнения ставились 3 балла. Если построен алгоритм сортировки в частном случае (для конкретных значений n) начислялись еще 3 балла. Если сформулирован любой корректный алгоритм в общем случае, то к предыдущей сумме добавлялись еще 4 балла.

№10

0-2 Были попытки применить классические формулы комбинаторики без учета условия задачи.

3-4 Были попытки указать способ решения, указания на лемму Бернсайда или теорему Пойа.

5-6 Были предприняты попытки посчитать цикловой индекс, не ведущие к результату или содержащие серьезные просчеты.

7-8 Были допущены ошибки или пропущена одна из "групп" симметрий, что привело к неправильному ответу.

9 Была допущена несущественная арифметическая ошибка, не влияющая на ход решения.

Литература

1. Ильин В.А. Линейная алгебра.
2. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа.
3. Кудрявцев Л.Д. Математический анализ, т. 1,2.
4. Фихтенгольц Г.М. Основы дифференциального и интегрального исчисления, тт. 1-3.
5. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов. Под редакцией Б.П. Демидовича.
6. Л.С. Понтрягин. Обыкновенные дифференциальные уравнения.
7. Филипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей.
9. Крамер Г. Математические методы статистики.
10. Шведов А.С. Теория вероятностей и математическая статистика.
11. Кузнецов О.П. Дискретная математика для инженера.
12. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов.
13. Оре О. Теория графов.